

$\Sigma_1(X, 2)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების დაუყვანადი წარმომქმნელი სისტემები

ომარ გივრადე, ალექსანდრე ბაკურიძე, თენგიზ დიდმანიძე

ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

omar.givradze@bsu.edu.ge, a.bakuridze@bsu.edu.ge

რეზიუმე

მოცემულ ნაშრომში განხილულია $\Sigma_1(X, 2)$ კლასის D გაერთიანებათა სრული X –ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების წარმომქმნელი სისტემები.

საკვანძო სიტყვები: ნახევარმესერი, ნახევარჯგუფი, ბინარული მიმართება

1. შესავალი

ვთქვათ X არაცარიელი სიმრავლეა, D არის გაერთიანებათა სრული X –ნახევარმესერი, f არის ასახვა X სიმრავლისა D -ში. მაშინ ყოველი ასეთი f ასახვისათვის X სიმრავლეზე განისაზღვრება α_f ბინარული მიმართება, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას $\alpha_f = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$. ყველა ასეთ α_f ბინარულ მიმართებათა სიმრავლე $(f: X \rightarrow D)$ აღინიშნება $B_X(D)$ სიმბოლოთი. ადვილად მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ წარმოადგენს ნახევარჯგუფს ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ, რომელსაც ეწოდება D გაერთიანებითა სრული X –ნახევარმესერით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი.

მეთოდოლოგია. ნაშრომში გამოყენებულია როგორც ნახევარჯგუფთა კვლევის ზოგადი მეთოდები, ასევე ბინარულ მიმართებათა და ნახევარმესერთა კვლევის მეთოდები.

ვთქვათ $\Sigma_1(X, 2)$ არის გაერთიანებათა X –ნახევარმესერთა ისეთი კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია $D = \{Z_1, \bar{D}\}$ გაერთიანებათა სრული X –ნახევარმესერისა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $Z_1 \subset \bar{D}$ (იხ, ნახ, 1).



ნახ. 1

ვთქვათ $C(D) = \{P_0, P_1\}$, სადაც

$$P_0, P_1 \subset X, P_0 \cap P_1 = \emptyset \text{ და } \varphi = \begin{pmatrix} \bar{D} & Z_1 \\ P_0 & P_1 \end{pmatrix}$$

წარმოადგენს ასახვას D ნახევარმესერისა $C(D)$ სიმრავლეზე. მაშინ D ნახევარმესერის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\bar{D} = P_0 \cup P_1, \quad Z_1 = P_0, \quad (1)$$

სადაც P_1 არის D ნახევარმესერის ბაზისური წყარო, P_0 კი სისავსის წყარო. გამომდინარე აქედან $|X| \geq 1$.

ლემა 1. ვთქვათ $D = \{Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$, $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$. თუ $B \neq \emptyset$, მაშინ B არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ $D = \{Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$, $\alpha \in B$ და $\alpha = \delta \circ \beta$ რომელიდან $\delta, \beta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$ –თვის. მაშინ δ ელემენტის კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})$, ე. ი. $Y_1^\delta \cup Y_0^\delta = X$ და $Y_1^\delta \cap Y_0^\delta = \emptyset$. შესაბამისად მივიღებთ $\alpha = \delta \circ \beta = \delta \circ \bar{\beta}$, სადაც $\bar{\beta}$ წარმოადგენს β ბინარული მიმართების სუბკვაზინორმალურ წარმოდგენას. მარტივად დასაანახია, რომ

$$\alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) \quad (2)$$

$\alpha = \delta \circ \bar{\beta}$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $D = V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \bar{\beta})$, ასე რომ $D = V(D, \bar{\beta})$.

დაშვების თანახმად $\alpha \in B$, ე.ი. არსებობს α ელემენტის კვაზინორმალური წარმოდგენა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე: $\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $|Y_i^\alpha| \geq 1$ ნებისმიერი $i = 0, 1$, რადგანაც $\alpha \in B$ (თუ $Y_j^\delta = \emptyset$ რომელიმე j ($0 \leq j \leq 1$), მაშინ $V(X^*, \alpha) \neq D$), ე.ი. $|X| \geq 2$.

Z_1 ელემენტისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

a) $Z_1 = \emptyset$. ამ შემთხვევაში გვქნება, რომ $P_0 = \cap D = \emptyset$, ხოლო $\gamma_1 = \begin{pmatrix} \emptyset & P_1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} \emptyset & P_1 \\ \emptyset & \bar{D} \end{pmatrix}$ არიან $\{\emptyset, P_1\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვები D ნახევარმესერში, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $\gamma_i(\emptyset) = \emptyset$ ($i = 1, 2$).

თუ $X = \bar{D}$, მაშინ (1) ფორმალური ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\emptyset \cup P_1 = \bar{D}$. ამ შემთხვევაში $P_0 = \emptyset$, $P_1 = \bar{D}$, $X \setminus \bar{D} = \emptyset$, $\bar{\beta} = (\emptyset \times \emptyset) \cup (P_1 \times \bar{D}) \cup \emptyset = X \times \bar{D}$. მარტივი დასაწახია, რომ $V(D, \bar{\beta}) = D$ და $\alpha = \delta \circ \bar{\beta} = ((Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})) \circ (X \times D) = ((Y_1^\delta \times Z_1) \circ (X \times D)) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ (X \times D)) = (Y_1^\delta \times \bar{D}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = X \times \bar{D} \notin B$, ვინაიდან $V(X^*, \alpha) = \{\bar{D}\} \neq D$. ასე, რომ $X \neq \bar{D}$.

შემდეგში ნაგულისხმებია, რომ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$.

γ_i ($i = 1, 2$) ბინარული მიმართებებისთვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

ვთქვათ, $\gamma_1 = \begin{pmatrix} \emptyset & P_1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$. (1) ფორმალური ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $P_1 = \bar{D} \neq \emptyset$.

თუ $\bar{\gamma}_1$ არის $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლის ასახვა $D \setminus \{\emptyset\} = \{\bar{D}\}$ სიმრავლეზე (ზემოთ აღნიშნულის თანახმად $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$), მაშინ

$$\bar{\beta} = (P_1 \times \emptyset) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \bar{D}} (\{t'\} \times \bar{\gamma}_1(t')) \quad (3)$$

$V(D, \bar{\beta}) = D$ და ფორმალური (1) ტოლობიდან და (2), (3) ტოლობებიდან $V(X^*, \alpha) = \{\emptyset\} \neq D$ პირობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ $Z_1 \bar{\beta} = \emptyset \bar{\beta} = \emptyset$, $\bar{D} \bar{\beta} = \emptyset \bar{\beta} \cup P_1 \bar{\beta} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $\alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \emptyset) = X \times \emptyset = \emptyset \notin B$.

ვთქვათ $\gamma_2 = \begin{pmatrix} \emptyset & P_1 \\ \emptyset & \bar{D} \end{pmatrix}$ და $\bar{\gamma}_2$ არის $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლის ასახვა $D \setminus \{\bar{D}\}$ ნახევარმესერზე. ასე, რომ თუ

$$\bar{\beta} = (P_1 \times \bar{D}) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \bar{D}} (\{t'\} \times \bar{\gamma}_2(t')) \quad (4)$$

მაშინ $V(D, \bar{\beta}) = D$. ფორმალური (1) ტოლობიდან და (2), (4) ტოლობებიდან გვქნება: $Z_1 \bar{\beta} = \emptyset \bar{\beta} = \emptyset$, $\bar{D} \bar{\beta} = \emptyset \bar{\beta} \cup P_1 \bar{\beta} = \emptyset \cup \bar{D} = \bar{D}$, $\alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = \delta$. მაგრამ $\alpha = \delta$ ტოლობა ეწინააღმდეგება $\delta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$ პირობას. ე.ი. ამ შემთხვევაში $\alpha \notin B$.

მოცემულ სიტუაციაში **a)** შემთხვევიდან გამომდინარეობს, რომ B წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს, რადგანაც γ_i ($i = 1, 2$) ასახვები არიან ყველა შესაძლო ასახვები $\{\emptyset, P_1\}$ სიმრავლიდან D ნახევარმესერში, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\gamma_i(\emptyset) = \emptyset$ პირობას.

$$\mathbf{b)} \quad Z_1 \neq \emptyset. \text{ მაშინ } P_0 = \cap D \neq \emptyset \text{ და } \sigma_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Z_1 & Z_1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Z_1 & \bar{D} \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \bar{D} & Z_1 \end{pmatrix} \text{ და } \sigma_4 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \bar{D} & \bar{D} \end{pmatrix}$$

არიან ყველა შესაძლო ასახვები $\{P_0, P_1\}$ სიმრავლიდან D ნახევარმესერში.

თუ $X = \bar{D}$ და $\sigma_i(P_0) = \sigma_i(P_1)$ ($i = 1, 4$), მაშინ ფორმალური (1) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\sigma_i(P_1) = \bar{D}$ და ამ შემთხვევაში $\bar{\beta} = X \times \sigma_i(P_1)$. ასე რომ, $\bar{\beta} = X \times Z_1$ ან $\bar{\beta} = X \times \bar{D}$. ორივე შემთხვევაში $V(D, \bar{\beta}) = D$ და $\alpha = \delta \circ \bar{\beta} = ((Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})) \circ (X \times Z_1) = ((Y_1^\delta \times$

$Z_1) \circ (X \times Z_1)) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ (X \times Z_1)) = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times Z_1) = X \times Z_1 \notin B, \alpha = \delta \circ \bar{\beta} = ((Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})) \circ (X \times \bar{D}) = ((Y_1^\delta \times Z_1) \circ (X \times \bar{D})) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ (X \times \bar{D})) = (Y_1^\delta \times \bar{D}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = X \times \bar{D} \notin B. \text{ ამრიგად } V(X^*, \alpha) \neq D. \text{ ასე, რომ } X \neq \bar{D}.$

შემდეგში იგულისხმება, რომ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$.

ბინარული σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) მიმართებებისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

ვთქვათ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Z_1 & Z_1 \end{pmatrix}$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება, რომ $P_0 \neq \emptyset$ და $P_1 \neq \emptyset$. თუ $\bar{\sigma}_1$ არის ასახვა $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლისა $D \setminus \{Z_1\} = \{\bar{D}\}$ სიმრავლეზე, მაშინ

$$\bar{\beta} = ((P_0 \cup P_1) \times Z_1) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \bar{D}} \{t'\} \times \bar{\sigma}_1(t') \quad (5)$$

$V(D, \bar{\beta}) = D$ და ფორმალური (1) ტოლობებიდან და (2), (5) ტოლობებიდან გვექნება: $Z_1 \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} = Z_1, \bar{D} \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} \cup P_1 \bar{\beta} = Z_1 \cup Z_1 = Z_1, \alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times Z_1) = X \times Z_1 \notin B. \text{ ამრიგად } V(X^*, \alpha) = \{Z_1\} \neq D.$

ვთქვათ, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Z_1 & \bar{D} \end{pmatrix}$ და $\bar{\sigma}_2$ არის $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლის ასახვა D ნახევარმესერში. ასე, რომ თუ

$$\bar{\beta} = (P_0 \times Z_1) \cup (P_1 \times \bar{D}) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \bar{D}} \{t'\} \times \bar{\sigma}_2(t') \quad (6)$$

მაშინ $V(D, \bar{\beta}) = D$. ფორმალური (1) ტოლობებიდან და (2), (6) ტოლობებიდან გვექნება: $Z_1 \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} = Z_1, \bar{D} \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} \cup P_1 \bar{\beta} = Z_1 \cup \bar{D} = \bar{D}, \alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = \delta \notin B \setminus \{\alpha\}$. მაგრამ $\alpha = \delta$ ტოლობა ეწინააღმდეგება $\delta \in B_X(D) \setminus \{\alpha\}$ პირობას, ე. ი. ამ შემთხვევაში $\alpha \notin B$.

ვთქვათ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \bar{D} & Z_1 \end{pmatrix}$ და $\bar{\sigma}_3$ არის $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლის ასახვა D ნახევარმესერში. ასე, რომ თუ

$$\bar{\beta} = (P_0 \times \bar{D}) \cup (P_1 \times Z_1) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \bar{D}} \{t'\} \times \bar{\sigma}_3(t') \quad (7)$$

მაშინ $V(D, \bar{\beta}) = D$. ფორმალური (1) ტოლობებიდან და (2), (7) ტოლობებიდან გვექნება: $Z_1 \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} = \bar{D}, \bar{D} \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} \cup P_1 \bar{\beta} = \bar{D} \cup Z_1 = \bar{D}, \alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) = (Y_1^\delta \times \bar{D}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = X \times \bar{D} \notin B. \text{ ამრიგად } V(X^*, \alpha) = \{\bar{D}\} \neq D.$

ვთქვათ, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ \bar{D} & \bar{D} \end{pmatrix}$. თუ $\bar{\sigma}_4$ არის $X \setminus \bar{D}$ სიმრავლის $D \setminus \{\bar{D}\} = \{Z_1\}$ სიმრავლეზე ასახვა, მაშინ

$$\bar{\beta} = ((P_0 \cup P_1) \times \bar{D}) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \bar{D}} \{t'\} \times \bar{\sigma}_4(t') \quad (8)$$

ვინაიდან $V(X^*, \alpha) = \{\bar{D}\} \neq D$, ამიტომ $V(D, \bar{\beta}) = D$ და (1) ფორმალური ტოლობებიდან და (2), (8) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $Z_1 \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} = \bar{D}, \bar{D} \bar{\beta} = P_0 \bar{\beta} \cup P_1 \bar{\beta} = \bar{D} \cup \bar{D} = \bar{D}, \alpha = \delta \circ \bar{\beta} = (Y_1^\delta \times Z_1 \bar{\beta}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D} \bar{\beta}) = (Y_1^\delta \times \bar{D}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = X \times \bar{D} \notin B. \text{ ამრიგად, } b) \text{ შემთხვევიდან გამომდინარეობს, რომ } B \text{ არის } B_X(D) \text{ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტების სიმრავლე, რადგანაც } \sigma_1 - \sigma_4 \text{ არიან ყველა შესაძლო ასახვები } \{P_0, P_1\} \text{ სიმრავლიდან } D \text{ ნახევარმესერში. } \textbf{ლემა 1 დამტკიცებულია.}$

შედეგი 1. ვთქვათ $D = \{\emptyset, \bar{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$ და $B = \{\alpha \in B_X(D) | V(X^*, \alpha) = D\}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

- 1) თუ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 = \emptyset$, მაშინ $\alpha = X \times D$ არ წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით;
- 2) თუ $X = \bar{D}$ და $Z_1 \neq \emptyset$, მაშინ $\alpha = X \times Z_1$ არ წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით;
- 3) თუ $X = \bar{D}$ და $Z_1 = \emptyset$, მაშინ $\alpha = \emptyset$ და $\alpha = X \times \bar{D}$ არ წარმოიქმნებიან B სიმრავლის ელემენტებით.

დამტკიცება. ვთქვათ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1, Z_1 = \emptyset$ და $\delta, \beta \in B$. მაშინ ბინარულ δ მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})$, სადაც $Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\emptyset\}$ და

$\delta \circ \beta = (Y_1^\delta \times \emptyset \beta) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}\beta) = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}\beta) \neq X \times \bar{D}$, რადგანაც $Y_1^\delta \neq \emptyset$. მაშასადამე, თუ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 = \emptyset$, მაშინ $\alpha = X \times D$ არ წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით.

შედეგი 1-ის 1) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ $X = \bar{D}$ და $Z_1 \neq \emptyset$. თუ δ და β არიან B სიმრავლის ისეთი ელემენტები, რომ $\delta \circ \beta = X \times Z_1$, მაშინ ბინარულ δ მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე: $\delta = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times X)$, სადაც $Y_1^\delta, Y_0^\delta \notin \{\emptyset\}$ და $\delta \circ \beta = (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}\beta) = (Y_1^\delta \times Z_1\beta) \cup (Y_0^\delta \times X\beta) = X \times Z_1$, ე.ი. $Z_1\beta = X\beta = Z_1$. ტოლობიდან $X\beta = Z_1$ გამომდინარეობს $t\beta = Z_1$ ყოველი $t \in X$ -თვის, რადგანაც Z_1 არის D ნახევარჯგუფის უმცირესი ელემენტი. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $\beta = X \times Z_1$. ბოლო ტოლობა ეწინააღმდეგება $\beta \in B$ პირობას, მაშასადამე, ბინარული $\alpha = X \times Z_1$ მიმართება არ წარმოიქმნება B სიმრავლის ელემენტებით.

შედეგი 1-ის 2) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ $X = \bar{D}$, $Z_1 = \emptyset$. თუ $\alpha = \delta \circ \beta$ რომელიღაც $\delta, \beta \in B$, მაშინ ბინარული δ და β მიმართებების კვაზინორმალური წარმოდგენები ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\delta = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times X)$, $\beta = (Y_1^\beta \times \emptyset) \cup (Y_0^\beta \times \bar{D}) = (Y_1^\beta \times \emptyset) \cup (Y_0^\beta \times X)$, სადაც $Y_1^\delta, Y_0^\delta, Y_1^\beta, Y_0^\beta \notin \{\emptyset\}$, ამდენად $V(X^*, \delta) = V(X^*, \beta) = D$ ($\delta, \beta \in B$). ასე, რომ გვექნება: $\alpha = \delta \circ \beta = ((Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times X)) \circ ((Y_1^\beta \times \emptyset) \cup (Y_0^\beta \times X)) = ((Y_1^\delta \times \emptyset) \circ (Y_1^\beta \times \emptyset)) \cup ((Y_1^\delta \times \emptyset) \circ (Y_0^\beta \times X)) \cup ((Y_0^\delta \times X) \circ (Y_1^\beta \times \emptyset)) \cup ((Y_0^\delta \times X) \circ (Y_0^\beta \times X)) = \emptyset \cup \emptyset \cup (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times X) = \delta$.

რადგანაც $X \cap Y_1^\beta = Y_1^\beta \neq \emptyset$ და $X \cap Y_0^\beta = Y_0^\beta \neq \emptyset$. მაგრამ ტოლობებიდან $\alpha = \emptyset$, $\alpha = \delta$ ან $\alpha = X \times \bar{D}$, $\alpha = \delta$ შესაბამისად გამომდინარეობს $\alpha \notin B$ და $\alpha \in B$, რადგანაც დაშვების თანახმად $\delta \in B$, ე.ი. $\alpha = \emptyset$ და $\alpha = X \times \bar{D}$ არ წარმოიქმნებიან B სიმრავლის ელემენტებით.

შედეგი 1-ის 3) დებულება დამტკიცებულია. **შედეგი 1 დამტკიცებულია.**

თეორემა 1. ვთქვათ $D = \{Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$. თუ $B = \{\alpha \in B_X(D) | V(X^*, \alpha) = D\}$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

- თუ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 \neq \emptyset$, მაშინ B არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანადი წარმომქმნელი სიმრავლე;
- თუ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 = \emptyset$, მაშინ $B \cup \{X \times \bar{D}\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანადი წარმომქმნელი სიმრავლე;
- თუ $X = \bar{D}$ და $Z_1 \neq \emptyset$, მაშინ $B \cup \{X \times Z_1\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანადი წარმომქმნელი სიმრავლე;
- თუ $X = \bar{D}$ და $Z_1 = \emptyset$, მაშინ $B \cup \{\emptyset, X \times \bar{D}\}$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანადი წარმომქმნელი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$, $Z_1 \neq \emptyset$ და α არის $B_X(D) \setminus B$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. α ბინარულ მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე: $\alpha = (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \bar{D})$, სადაც $Y_1^\alpha = \emptyset$ ან $Y_0^\alpha = \emptyset$ ($V(X^*, \alpha) \neq D$ რადგანაც $\alpha \notin B$).

ვთქვათ, $Y_1^\alpha = \emptyset$. მაშინ $\alpha = X \times \bar{D}$ და ნებისმიერი $\delta = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) \in B$ და $\beta = (Z_1 \times \bar{D}) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1)$ -თვის გვექნება $\beta \in B$, რადგანაც $Z_1 \neq \emptyset$ დაშვების თანახმად და $X \setminus \bar{D} \subset X \setminus Z_1 \neq \emptyset$. ამრიგად, რადგანაც $\bar{D} \supset Z_1$, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $\delta \circ \beta = ((Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})) \circ ((Z_1 \times \bar{D}) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1)) = ((Y_1^\delta \times Z_1) \circ (Z_1 \times \bar{D})) \cup ((Y_1^\delta \times Z_1) \circ ((X \setminus Z_1) \times Z_1)) \cup$

$$\left((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ (Z_1 \times \bar{D})\right) \cup \left((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ ((X \setminus Z_1) \times Z_1)\right) = (Y_1^\delta \times \bar{D}) \cup \emptyset \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) \cup (Y_0^\delta \times Z_1) = (Y_1^\delta \times \bar{D}) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) = X \times \bar{D} = \alpha.$$

ვთქვათ, $Y_0^\alpha = \emptyset$. მაშინ $\alpha = X \times Z_1$ და ნებისმიერი $\delta = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) \in B$ და $\beta = (\bar{D} \times Z_1) \cup ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})$ ელემენტებისათვის გვაქვს $\beta \in B$, რადგანაც $X \setminus \bar{D} \neq \emptyset$ ($|X \setminus \bar{D}| \geq 1$).

ამრიგად, რადგანაც დაშვების თანახმად $\bar{D} \supset Z_1$, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $\delta \circ \beta = ((Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})) \circ ((\bar{D} \times \emptyset) \cup ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})) = ((Y_1^\delta \times \emptyset) \circ (\bar{D} \times \emptyset)) \cup ((Y_1^\delta \times \emptyset) \circ ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ (\bar{D} \times \emptyset)) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})) = \emptyset \cup \emptyset \cup (Y_0^\delta \times \emptyset) \cup \emptyset = \emptyset = \alpha$.

თეორემა1-ის a) დებულება დამტკიცებულია.

ვთქვათ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 = \emptyset$. ნებისმიერი $\delta = (Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D}) \in B$ და $\beta = (\bar{D} \times \emptyset) \cup ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})$ -თვის გვექნება, რომ $\beta \in B$, რადგანაც $X \setminus \bar{D} \neq \emptyset$ ($|X \setminus \bar{D}| \geq 1$). ასეთ შემთხვევაში სრულდება ტოლობა: $\delta \circ \beta = ((Y_1^\delta \times \emptyset) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})) \circ ((\bar{D} \times \emptyset) \cup ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})) = ((Y_1^\delta \times \emptyset) \circ (\bar{D} \times \emptyset)) \cup ((Y_1^\delta \times \emptyset) \circ ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ (\bar{D} \times \emptyset)) \cup ((Y_0^\delta \times \bar{D}) \circ ((X \setminus \bar{D}) \times \bar{D})) = \emptyset \cup (Y_0^\delta \times \emptyset) \cup \emptyset = \emptyset = \alpha$.

ახლა თეორემა1-ის b) დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი1-ის 1) დებულებიდან.

ვთქვათ $X = \bar{D}$ და $Z_1 \neq \emptyset$. დავუშვათ, $\delta = (Y_1^\delta \times Z_1) \cup (Y_0^\delta \times \bar{D})$ არის B სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი და $\beta = (Z_1 \times \bar{D}) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1)$. ადვილი დასანახია, რომ $\beta \in B$ და $\delta \circ \beta = ((Z_1 \times Z_1) \cup ((X \setminus Z_1) \times \bar{D})) \circ ((Z_1 \times \bar{D}) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1)) = ((Z_1 \times Z_1) \circ (Z_1 \times \bar{D})) \cup ((Z_1 \times Z_1) \circ ((X \setminus Z_1) \times Z_1)) \cup (((X \setminus Z_1) \times \bar{D}) \circ (Z_1 \times \bar{D})) \cup (((X \setminus Z_1) \times \bar{D}) \circ ((X \setminus Z_1) \times Z_1)) = (Z_1 \times \bar{D}) \cup \emptyset \cup ((X \setminus Z_1) \times \bar{D}) \cup ((X \setminus Z_1) \times Z_1) = (Z_1 \times \bar{D}) \cup ((X \setminus Z_1) \times \bar{D}) = X \times \bar{D}$, რადგანაც დაშვების თანახმად $\bar{D} \supset Z_1$.

ახლა თეორემა1-ის c) დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი1-ის 2) დებულებიდან, თეორემა1-ის d) დებულება კი უშუალოდ გამომდინარეობს შედეგი1-ის 3) დებულებიდან. **თეორემა 1 დამტკიცებულია.**

შედეგი 2. ვთქვათ, X სასრული სიმრავლეა და $D = \{Z_1, \bar{D}\} \in \Sigma_1(X, 2)$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის დაუყვანად B' წარმომქმნელთა სიმრავლის ელემენტთა როდენობისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

- თუ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 \neq \emptyset$, მაშინ $|B'| = 2^{|X|} - 2$;
- თუ $|X \setminus \bar{D}| \geq 1$ და $Z_1 = \emptyset$ ან $X = \bar{D}$ და $Z_1 \neq \emptyset$, მაშინ $|B'| = 2^{|X|} - 1$;
- თუ $X = \bar{D}$ და $Z_1 = \emptyset$, მაშინ $|B'| = 2^{|X|}$.

დამტკიცება. ცნობილია, რომ თუ B არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა გარე ელემენტთა სიმრავლე და B' არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი წარმომქმნელთა სიმრავლე, მაშინ $B \subseteq B'$. ლემა1-ის თანახმად $B = \{\alpha \in B_X(D) \mid V(X^*, \alpha) = D\}$ სიმრავლე წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლეს. ადვილი დასანახია, რომ $B = B_X(D) \setminus \{X \times Z_1, X \times \bar{D}\}$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $|B| = 2^{|X|} - 2$ (იხ. 1).

თეორემა1-ის a) დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $B = B'$, ე.ი. $|B'| = 2^{|X|} - 2$; თეორემა1-ის b) და c) დებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ $B' = B \cup \{X \times \bar{D}\}$ ან $B' = B \cup \{X \times Z_1\}$, ე.ი.

$|B'| = (2^{|X|} - 2) + 1 = 2^{|X|} - 1$; თეორემა 1-ის d) დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $B' = B \cup \{X \times Z_1, X \times \bar{D}\}$, ე.ი. $|B'| = (2^{|X|} - 2) + 2 = 2^{|X|}$. **შედეგი 2 დამტკიცებულია.**

3. დასკვნა

ნაშრომში აღწერილია $\Sigma_1(X, 2)$ კლასის D გაერთიანებათა სრული X –ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის გარე ელემენტთა სიმრავლე. ნაჩვენებია, რომ ეს სიმრავლე წარმოქმნის ნახევარჯგუფს, საიდანაც ვასკვნიტ, რომ ის არის ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა დაუყვანადი სისტემა. სასრული ნახევარჯგუფებისათვის მიღებულია წარმომქმნელ სიმრავლეებში ელემენტთა რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები.

გამოყენებული ლიტერატურა:

4. Yasha Diasamidze, Shota Makharadze. Complete semigroups of binary relations. Turkey, Kriter, 2013, 1–519 .
5. Yasha Diasamidze, Neşet Aydin, Ali Erdoğan. Generating Set of the Complete Semigroups of Binary Relations. Applied Mathematics, 2016, 7, 98-107.
6. Yasha Diasamidze, Shota Makharadze. Complete semigroups of binary relations defined by elementary and nodal X – semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, 111, no.1, 2002, Plenum Publ. Corp., New York, 3171–3226 .
7. Yasha Diasamidze, Temuri Sirabidze. Complete semigroups of binary relations defined by three-element X – chains. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, 2003, 4320–4350 .
8. Omar Givradze. Irreducible Generating Sets of Complete Semigroups of Unions $B_X(D)$ Defined by Semilattices of Class $\Sigma_2(X, 4)$. Journal of Mathematical Sciences, 186, no. 5, 2012, 745-750.
9. Omar Givradze. Irreducible Generating sets of Complete Semigroups of Unions. Journal of Mathematical Sciences, 197, no.6, 2014, 755-760.

Generated Sets of the Complete Semigroup Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X, 2)$

Omar Givradze, Aleksandre Bakuridze, Tengiz Didmanidze

Batumi Shota Rustaveli State University

omar.givradze@bsu.edu.ge, a.bakuridze@bsu.edu.ge

Abstract

This paper discusses the systems of complete semigroups $B_X(D)$ of binary relations defined by complete X -semi-sets of unions of class D of $\Sigma_1(X, 2)$.

Keywords: semi-set, semi-group, binary relation