

რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა გრანდ ლეზეგის სივრცეებში

დალი მახარაძე¹, ალექსანდრე მესხი²

¹ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

²ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტი

dali.makharadze@bsu.edu.ge, alexander.meskhi@kiu.edu.ge

რეზიუმე

ნაშრომში წარმოდგენილია რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა გრანდ ლეზეგის სივრცეებში. განხილულია ორადწრფივი მაქსიმალური ოპერატორის ასახვის თვისებები კლასიკური ლეზეგის სივრცეებისთვის.

საკვანძო სიტყვები: გრანდ ლეზეგის სივრცე, რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორია, შემოსაზღვრულობა, წონიანი უტოლობები.

რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთი ძლიერი ინსტრუმენტია. რაც ნიშნავს, რომ თუ მოცემული M ოპერატორი შემოსაზღვრულია წონიან ლეზეგის სივრცეში $L_{\mu}^{p_0}$ რაიმე ფიქსირებული p_0 -სთვის და ყველა μ წონისთვის A_{p_0} კლასიდან, მაშინ M შემოსაზღვრულია ყველა სივრცეში L_{μ}^p სივრცეში, ყოველი p -თვის, $1 < p < \infty$ და ყოველი $\mu \in A_p$ წონისთვის. ექსტრაპოლაციის თეორია შესწავლილია როგორც კლასიკურ ლეზეგის სივრცეებში, ისე სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში (იხ. [1],[7]).

შემოსაზღვრულ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული მუდმივიმანკვნილობიანი გრანდ ლეზეგის სივრცეები $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, შემოღებული იქნა 1992 წელს ტ. ივანიეცის და ს. სბორდონეს მიერ იაკობიანის ინტეგრებადობის მინიმალური პირობების დადგენის თვალსაზრისით (იხ. [3]). მაშინ, როცა უფრო ზოგადი სივრცე $L^{p,\theta}(\Omega)$ დაკავშირებულია

$$\operatorname{div} A(x, \nabla u) = \mu$$

არაჰომოგენური p -ჰარმონიული განტოლების კვლევასთან [2].

ასეთ სივრცეთა თეორია თანამედროვე ანალიზის ერთ-ერთი ინტენსიურად განვითარებადი მიმართულებაა (იხ. [4]).

განვიხილოთ განზოგადებული გრანდ ლეზეგის სივრცეები $L_{\mu}^{p,\psi(\cdot)}(\Omega)$ μ -წონით Ω სიმრავლეზე (ანუ μ არის ინტეგრებადი ფუნქცია Ω სიმრავლეზე). ნორმა $L_{\mu}^{p,\psi(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\|f\|_{L_{\mu}^{p,\psi(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{q(\varepsilon)}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

სადაც $\psi(\cdot)$ არის არაკლებადი ზომადი ფუნქცია $(0, p-1)$ შუალედზე, ისეთი რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0.$$

თუკი $\psi(x) = x^{\theta}$ და $\mu = \text{const}$, სადაც θ დადებითი რიცხვია, მაშინ გვაქვს გრეკოს, ივანიეცის და სბორდონეს $L^{p,\theta}(\Omega)$ კლასი [2]. კერძოდ, თუ $L^{p,\theta}(\Omega)$ სივრცეში $\theta = 1$, მაშინ მივიღებთ ივანიეცის და სბორდონეს $L^p(\Omega)$ სივრცეს.

$L_{\mu}^{p,\psi(\cdot)}(\Omega)$ ბანახის სივრცეა და ადგილი აქვს შემდეგ უწყვეტ ჩადგმებს:

$$L_{\mu}^p(\Omega) \hookrightarrow L_{\mu}^{p,\psi(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{\mu}^{p-\varepsilon}(\Omega), \quad 0 < \varepsilon < p-1,$$

გრანდ ფუნქციური სივრცეების თვისებები შესწავლილია [5] მონოგრაფიაში.

ახლა ვთქვათ, $1 < p < \infty$ და μ არის წონითი ფუნქცია Ω სიმრავლეზე. მაშინ

$$\|f\|_{L_\mu^{p,\psi(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{0 < \varepsilon \leq p-1} (\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L_\mu^{p-\varepsilon}(\Omega)} = \sup_{1 < r < p} (\psi(p/r'))^{\frac{r}{p}} \|f\|_{L_\mu^{p/r}(\Omega)}, \text{ სადა } r' = \frac{r}{r-1}.$$

მხედველობაში მივიღებთ რა ამ განმარტებას, განვსაზღვრავთ $\vec{f}$ ვექტორ-ფუნქციის და ვექტორული $\vec{p}$ წონის კლასს $\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)$ შემდეგნაირად: $\vec{f} \in \mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)$, თუ

$$\begin{aligned} \|\vec{f}\|_{\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)} &= \sup_{1 < r < p} \left\{ \left(\psi\left(\frac{p}{r}\right) \right)^{\frac{r}{p}} \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{\mathcal{L}_{\rho_j}^{\frac{p_j}{r}}(\Omega)} \right\} \\ &= \sup_{1 < r < p} \left\{ \prod_{j=1}^m (\varphi(p/r'))^{\frac{r}{p}} \|f_j\|_{\mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j/r}(\Omega)} \right\} < \infty, \end{aligned}$$

სადაც p განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{p} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}. \quad (1)$$

ვთქვათ, $\bar{p} = \min \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $\psi \in \mathcal{A}_{\bar{p}}$, მაშინ

$$\|\vec{f}\|_{\prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)} \leq \|\vec{f}\|_{\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)},$$

სადაც,

$$\|\vec{f}\|_{\prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \theta}(\Omega)} := \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \theta}(\Omega)}.$$

თუ $\psi(x) = x^\theta$, სადაც θ არის დადებითი მუდმივი, მაშინ $\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეს განვმარტავთ $\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \theta}(\Omega)$ სივრცის საშუალებით. კერძოდ, ცხადია, რომ

$$\|\vec{f}\|_{\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \theta}(\Omega)} \leq \|\vec{f}\|_{\prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \theta}(\Omega)}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $m = 1$, მაშინ $\mathcal{L} \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_{\rho_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)$ სივრცე ემთხვევა $\mathcal{L}_{\rho_j}^{p, \psi(\cdot)}(\Omega)$ გრანდ ლეზგის სივრცეს.

ვთქვათ, $1 \leq p_j < \infty$ ყოველი j -თვის $1 \leq j \leq m$ და $0 < p < \infty$, სადაც p განისაზღვრება (1) ტოლობით. ვიტყვი, რომ $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ეკუთვნის მრავლადწირვ მაკენჭაუპტის $A_{\vec{p}}(X)$ კლასს, თუკი

$$\|\vec{\omega}\|_{A_{\vec{p}}} := \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left\{ \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B v_{\vec{\omega}}(x) dx \right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega_j^{1-p'}(x) dx \right)^{p/p_j'} \right\} < \infty,$$

სადაც ზედა საზღვარი აღებულია ყოველი B -თვის $\mathbb{R}^n$ -დან.

როცა $p_j = 1$, მაშინ $\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega_j^{1-p'}(x) dx \right)^{p/p_j'}$ გამოსახულების ნაცვლად განიხილება $\left(\inf_B \omega_j \right)^{-1}$. ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა $m = 1$, ეს კლასი არის მაკენჭაუპტის ცნობილი A_p კლასი.

ახლა ვთქვათ, $A_{\vec{p}}(X)$ კლასის $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ -თვის, სადაც $\frac{1}{s} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i}$, და r მუდმივისთვის, $1 \leq r < \infty$, შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\overrightarrow{F^{(s)}} = \left(\left(\sum_i (f_1^i)^{\frac{1}{s_1}} \right)^{s_1}, \dots, \left(\sum_i (f_m^i)^{\frac{1}{s_m}} \right)^{s_m} \right), \quad (2)$$

$$\overrightarrow{F^{(r)}} = \left(\left(\sum_i (f_1^i)^{\frac{1}{r}} \right)^r, \dots, \left(\sum_i (f_m^i)^{\frac{1}{r}} \right)^r \right). \quad (3)$$

რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაცია კლასიკური ლებეგის სივრცეებისთვის განხილულია ნაშრომში [6]. სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ვთქვათ, რომ $\mathcal{F}$ იყოს R_n -ზე განსაზღვრულ არაუარყოფით ფუნქციათა ერთობლიობა. დავუშვათ, მაჩვენებლები $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$ არიან ისეთი, რომ მოცემული $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in A_{\vec{p}}$ -თვის სრულდება უტოლობა:

$$\|f\|_{L_{\vec{\omega}}^p(R_n)} \leq C \left([\vec{\omega}]_{A_{\vec{p}}} \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L_{\omega_j}^{p_j}(R_n)},$$

ყოველი $(f, f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}$, სადაც ასახვა: $\cdot \mapsto C(\cdot)$ არის არაკლებადი და ω

განისაზღვრება ტოლობით: $\omega = \prod_{j=1}^m \omega_j^{\frac{p}{p_j}}$. მაშინ ყოველი შემოსაზღვრული $\Omega \subset R^n$ -სთვის, ყოველი $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, $1 \leq q_1, q_2, \dots, q_m \leq \infty$, მაჩვენებლისთვის, ყოველი $\vec{v} \in A_{\vec{q}}(R^n)$ -სთვის და რაიმე $\psi(\cdot) \in A^q$ -სთვის, სრულდება უტოლობა:

$$\|f\|_{L_{\vec{v}}^{q, \psi(\cdot)}(\Omega)} \leq c \|\vec{f}\|_{L_{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L_{v_j}^{q_j, \psi(\cdot)}(\Omega)}}^m},$$

ყოველი $(f, f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}$ -თვის, სადაც q და v განისაზღვრება, შესაბამისად, ტოლობებით:

$$\frac{1}{q} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_j}, \quad v = \prod_{j=1}^m v_j^{\frac{q}{q_j}}$$

გარდა ამისა, ყოველი $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, $1 \leq s_1, s_2, \dots, s_m \leq \infty$, მაჩვენებლისთვის და ყოველი $\{(f^j, f_1^j, f_2^j, \dots, f_m^j)\} \subset \mathcal{F}$ მიმდევრობისთვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left\| \left(\sum_j (f^j)^s \right)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{\vec{v}}^{q, \psi(\cdot)}(\Omega)} \leq C_0 \left\| \overrightarrow{F^{(s)}} \right\|_{L_{\prod_{j=1}^m L_{v_j}^{q_j, \psi(\cdot)}(\Omega)}},$$

სადაც s განსაზღვრულია (1) ტოლობით, ხოლო $\overrightarrow{F^{(s)}}$ კი (2) ტოლობით.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს f და g ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციები R^n -ზე. განვიხილოთ ორადწრფივი მაქსიმალური ოპერატორი:

$$\mathcal{M}(f, g)(x) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y)| dy \right),$$

სადაც სუპრემუმი აღებულია საკოორდინატო ღერძების პარალელური გვერდების მქონე კუბის მიმართ.

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ვთქვათ, $m = 2$ და Ω შემოსაზღვრულია R^n -ზე, მაშინ ყოველი $\vec{p} = (p_1, p_2)$ და $\vec{s} = (s_1, s_2)$ -თვის, $1 < p_1, p_2, s_1, s_2 < \infty$, ყოველი $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in A_{\vec{p}}$ -თვის და ყოველი $\psi(\cdot) \in A^p$ -თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left\| \left(\sum_j \left(\mathcal{M}(f_1^j, f_2^j) \right)^s \right)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{\vec{\omega}}^{p, \psi(\cdot)}(\Omega)} \leq \tilde{C} \left\| \overrightarrow{F^{(s)}} \right\|_{L_{\prod_{j=1}^2 L_{\omega_j}^{p_j, \psi(\cdot)}(\Omega)}},$$

ყოველი f_i^j არაუარყოფითი ფუნქციისთვის Ω კომპაქტური მატარებლით.

References:

- [1] D. V. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of *Oper. Theory: Adv. Appl.* Basel: Birkhäuser, 2011.
- [2] L. Greco, T. Iwaniec, and C. Sbordone. Inverting the p -harmonic operator. *Manuscr. Math.*, 92(2)(1997), 249–258.
- [3] T. Iwaniec and C. Sbordone, On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 119(2)(1992), 129–143.
- [4] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, and S. Samko, *Integral operators in non-standard function spaces, Volume 3: Advances in Grand Function Spaces*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2024.
- [5] V. Kokilashvili, M. Mastilo, and A. Meskhi. Multilinear integral operators in weighted grand Lebesgue spaces. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 19(3) (2016), 696–724.
- [6] K. Li, J. M. Martell, Sh. Ombrosi, Extrapolation for multilinear Muckenhoupt classes and applications. *Adv. Math.* 373 (2020), 107286, 43 pp.
- [7] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and A_p weights. *Am. J. Math.*, 106(1984), 533–547.

Rubio de Francia's Extrapolation Theorem in Grand Lebesgue Spaces

Dali Makharadze¹, Alexander Meskhi²

¹Batumi Shota Rustaveli State University

²Kutaisi International University

dali.makharadze@bsu.edu.ge, alexander.meskhi@kiu.edu.ge

Abstract

In this note, we present multilinear Rubio de Francia's extrapolation theorem in grand Lebesgue spaces. The mapping properties of bilinear maximal operators in harmonic analysis are also discussed.

Key words and phrases: Grand Lebesgue space, Rubio de Francia's extrapolation theory, boundedness, weighted inequalities.